乱流のwavelet spectrum

京大防災研　山田道夫、京大理　大木谷耕司

ウェイブレット変換は、実空間とフーリエ空間で同時に局在化した基底によって関数を展開する方法であり、関数の特異性の検出に適した方法である[1-8]。しかし一般には、この基底は斜交系でありしかも過剰系であるため、エネルギー的な内容を伴う解析には適していない。そこで、流体乱流の速度データのエネルギー的な解析に応用するため、ここでは直交化された基底をもつウェイブレット変換（ウェイブレット展開）[9-10]を用いて、レイノルズ数の高い大気乱流の微細構造を調べた。このようなウェイブレット展開は、ある意味で局所化されたフーリエ解析と考えることができ、従来のエネルギースペクトルとの直接的な対応が可能となる。

乱流速度$u(t)$を次のようにウェイブレット展開する。

$$u(t) = \Sigma_j \Sigma_k \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t),$$

ここで$\alpha_{j,k}$は展開係数、$\phi_{j,k}$は適当な局在化した関数ϕ（アナライジング・ウェイブレット、フーリエ空間でコンパクトサポート）から

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j - k),\quad (j,\ k\text{は整数})$$

のように平行移動と縮小によって作られる関数である。このウェイブレット展開の基底$\{\phi_{j,k}(t)\}$は完全正規直交系であるので、展開係数$\alpha_{j,k}$の物理的な内容も通常通りである。従って、たとえば、$|\alpha_{j,k}|^2$を用いて、ある時刻（場所）においてあるスケールの変動が持つエネルギー、について語ることが可能である。$u(t)$がスケーリング則をもつときは、スケールjの変動がもつ総エネルギー、$E_j = \Sigma_k |\alpha_{j,k}|^2$、もスケーリングの性質を持つことが期待される（ここではE_jを、"ウェイブレットスペクトル"と呼ぶ）。実際、$\hat{\phi}(\omega)$がコンパクト・サポートを持つことから、$u(t)$のフーリエスペクトル$E(\omega)$が、$E(\omega) \sim \omega^{-D}$、となるときは、"ウェイブレットスペクトル"に、$E_j \sim 2^{-j(D-1)}$、の関係が成り立つことが期待される[11]。

我々が実測した自然風のフーリエスペクトルはKolmogorovのべき

則に近いが、精度はそれほど良くなくデータの”ウェイブレットスペクトル”を求めると、－3／5乗からのずれが（フーリエスペクトルで見るよりも）顕著に見いだされた。そこで、データが乱流部分とそれを汚す強いしかし時間的には短い攪乱部分からなる（データサンプリングの時間が十分でないため強く短い攪乱部分についての平均が十分でない）と考えて（作業仮設）、ウェイブレット係数をその大きさで分類した。各スケールjについて、ウェイブレット係数の大きさの平均値の定数倍を基準値として、ウェイブレット係数全体を大小2つの部分に分け、それぞれについて”ウェイブレットスペクトル”を作ったところ、値の小さい方が乱流のKolmogorov則と一致するべき則を示した。従って、この抽出法により求める乱流部分が得られたと考えられる。さらにこの乱流部分をあらわすウェイブレット係数から速度差の3乗平均を作ると、2点間の距離の1乗に比例し、一様等方性乱流に関するNavier-Stokes方程式からの厳密な結果と一致していることが確認された。

そこで、この乱流部分について、間欠性指数を求めることを試みた。一様等方性乱流において、2点のエネルギー散逸率の相関は、（2点間の速度差の6乗平均）／（2点間の距離の2乗）に比例するが、この量の2点間の距離に対する依存性は、乱流の間欠性を表現する特徴的な性質である。1パラメーターモデルである対数正規分布モデルやβモデルでは、この量は2点間の距離の（－μ）乗に比例する。ここでμは間欠性指数である。この関係を用いて実験データよりμの値を決定すると、μ～0．2が得られた。この値は、より精密な実験により得られている値μ＝0．2±0．05と矛盾しない[12)]。このことは、ウェイブレット展開を用いることにより、簡単な実験で得られる汚れたデータからも、乱流の詳細な解析が可能となることを示している。さらに、ウェイブレット展開の特徴は、変動のスケール毎に空間分布の様子を調べることができる点にあり、これによって乱流の間欠性のより詳細な構造を調べることが可能である[11)]。

参考文献

1. J.M.Combes, A.Grossmann and Ph.Tchamitchian, ed. Wavelets, Springer, 1989.
2. A.Grossmann, J.Morlet, in Mathematics+Physics, ed. L.Streit, vol.1, World Scientific, pp.135 -165, 1985.
3. A.Grossmann, J.Morlet and T.Paul, J.Math.Phys., vol.26, pp.2473-2479, 1985.
4. I.Daubechies, A.Grossmann and Y.Meyer, J.Math.Phys., vol.27, pp.1271-1283, 1986.
5. A.Arneodo, F.Argoul, J.Elezgaray and G.Grasseau, in Nonlinear Dynamics, ed. G.Turchetti, World Scientific, pp.130-180, 1989.
6. M.Farge and G.Rabreau, C.R.Acad.Sci., vol.II-317, pp.1479-1486, 1988.
7. F.Argoul, A.Arneodo, G.Grassear, Y.Gagne, E.J.Hopfiner and U.Frisch, Nature, vol.338, pp.51-53, 1989.
8. A.Arneodo, G.Grasseau and M.Holschneider, Phys.Rev.Lett., vol.61, pp.2281-2284.
9. Y.Meyer, in Wavelets (ref.1), pp.21-37, 1989.
10. A.Morimoto, Master thesis in mathematics department of Kyoto University, 1988.
11. M.Yamada and K.Ohkitani, in preparation.
12. F.Anselmet, Y.Gagne, E.J.Hopfinger and R.A.Antonia, J. Fluid Mech., vol.87, 1984, p.63.